ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.935.2+519.71

В. М. Марченко, доктор физико-математических наук, профессор (БГТУ);
И. М. Борковская, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ);
О. Н. Пыжкова, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой (БГТУ)

МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ В ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМАХ[1]

Приводится пример инвестиций, математическая модель которых представляет гибридную дискретно-непрерывную систему, сводящаяся, в свою очередь, к гибридной дифференциально-разностной системе. Для таких систем обсуждается подход к исследованию качественной теории управления на основе метода пространства состояний. Формулируются игровые задачи управляемости.

In this paper, we present an example of an economics model of a hybrid discrete-continuous system that can be reduced to a hybrid differential-difference one. We discuss approaches to study qualitative control theory problems for such a system based on the analysis of its states space. Several game problems of controllability are formulated.

Введение. Рассмотрим задачу описания инвестиций капитала, когда доступны два способа его инвестирования, при первом из которых прирост инвестируемого капитала пропорционален его величине и времени инвестирования, а во втором инвестирование происходит в форме депозита из расчета p процентов годовых с месячной капитализацией полученного дохода.

Построим математическую модель задачи. Пусть $x_1(t), x_2[k]-$ величины капиталов, инвестируемых t по первому способу инвестирования и в начале k-го месяца по второму способу инвестирования. Тогда по условию задачи: $x_1(t+\Delta t)-x_1(t)=a_{11}\,\Delta t\, x_1(t)$, где $a_{11}-$ коэффициент пропорциональности; аналогично $x_2[k+1]=\left(1+\dfrac{p}{1200}\right)x_2[k]$, откуда, переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получаем $\dot{x}_1(t)=a_{11}x_1(t)$.

Допуская, что в начале месяца после получения дохода возможно перераспределение вкладываемых капиталов между способами инвестирования с весовыми коэффициентами a_{12}, a_{21}, приходим к математической модели рассматриваемых инвестиций в виде следующей гибридной дискретно-непрерывной (ГДН) системы:

$$\dot{x}_1(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2[k],\ t\in[k,k+1);$$

$$x_2[k+1]=a_{21}x_1(k)+a_{22}x_2[k],\ k=0,1,2,...,$$

где $a_{22}=1+\dfrac{p}{1200}$, запись $x_2[k]$ означает функцию x_2 целочисленной переменной k.

В результате приходим к математической модели в виде динамической ГДН-системы:

$$\dot{x}_1(t)=A_{11}x_1(t)+A_{12}x_2(kh)+B_1u(t); \qquad (1)$$

$$x_2(kh+h)=A_{21}x_1(kh)+A_{22}x_2(kh)+B_2u(kh), \qquad (2)$$

$t\in[kh,kh+h)$, $k=0,$ 1, 2, ..., с непрерывными и дискретными переменными и начальными условиями

$$x_1(0)=x_{10},\ x_2[0]=x_{20}. \qquad (3)$$

Здесь $x_1(t)\in\mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(kh)\in\mathbb{R}^{n_2}$, $u(t)\in\mathbb{R}^{r}$; A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B $-$ постоянные матрицы соот-

[1] Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом (S/WI/2/2011).

ветствующих размеров; $0 < h$ – шаг квантования; $u = u(\cdot)$ – внешние (обычно кусочно-непрерывные) воздействия,

$$t \in [kh, kh+h),\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

При изучении реальных физических процессов зачастую наряду с динамическими встречаются также и алгебраические зависимости. Такие процессы описываются дифференциально-алгебраическими системами [1–3] (одни уравнения которых являются дифференциальными, другие – алгебраическими):

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t); \quad (4)$$

$$x_2(t+h) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t); \quad (5)$$

$$t \in [kh, kh+h),\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Их также относят к классу гибридных систем – гибридных дифференциально-разностных (ГДР) систем [4–6]. Следует, однако, признать, что термин «гибридные системы» перегружен. В настоящее время, особенно в англоязычной литературе, термин «гибридные» используется в основном в связи с дискретно-непрерывными системами или системами, содержащими логические переменные [7].

Гибридность, с нашей точки зрения, означает, вообще говоря, неоднородность в природе рассматриваемого процесса или методах его изучения. Термин «гибридные системы» относят к системам, описывающим процессы или объекты с существенно различающимися характеристиками, например, содержащие в основной динамике непрерывные и дискретные переменные (сигналы), детерминированные и случайные величины или воздействия и т. д., что, в конечном счете, и определяет характер (природу) гибридных систем.

Дальнейшая информация относительно гибридных систем может быть найдена в работах [1–12].

Начальные условия для системы (4), (5) зададим в виде

$$x_1(0) = x_1(+0) = x_{10};\ x_2(\tau) = \varphi(\tau),\ \tau \in [0, h). \quad (6)$$

Важнейшим понятием в общей теории систем [13, 14] является понятие состояния системы, и метод пространства состояний относится к основным методам исследования качественных характеристик изучаемых систем.

В данной работе метод пространства состояний рассматривается для линейных стационарных ГДН- и ГДР-систем.

1. Гибридные дискретно-непрерывные системы. Рассмотрим объект управления, описываемый ГДНсистемой (1), (2), где внешнее воздействие обычно имеет смысл управления (разрешается выбирать).

Очевидно, в качестве начального состояния этого объекта (система (1), (2)) можно взять пару

$$(x_{10}, x_{20}) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}. \quad (7)$$

Понятие состояния в теории систем детально изучалось Р. Калманом, причем в одних работах он требует минимальности информации, необходимой для однозначного вычисления движения объекта в будущем, в других работах о минимальности информации не говорится, однако содержательные результаты получены для минимальных состояний.

Нетрудно видеть, что состояние (7) не является минимальным для ГДН-системы (1), (2). Минимальным начальным состоянием для этой системы будет, например, пара

$$\left(x_{10}, \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} x_{20} \right) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_1+n_2}. \quad (8)$$

Сложнее обстоит дело с понятием текущего состояния ГДН-системы в момент времени $t > 0$. Если $t = kh$, где $k = 1, 2, \ldots$, то в качестве минимального состояния можно рассматривать пару $\left(x_1(t), \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} x_2(t) \right) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, и тогда для таких моментов времени, учитывая, что на основании формулы Коши решение $x_1(kh+h)$, $k = 0, 1, \ldots$ система (1), (2) представляется в виде

$$x_1(kh+h) = e^{A_{11}(kh+h-kh)}x_1(kh) + \int_{kh}^{kh+h} e^{A_{11}(kh+h-\tau)}A_{12}x_2(kh)d\tau = e^{A_{11}h}x_1(kh) + \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau A_{12}x_2(kh),$$

ГДН-система (1), (2) эквивалентна дискретной системе вида

$$z[k+1] = \sum\nolimits_h z[k] + \begin{bmatrix} \int_{kh}^{kh+h} e^{A_{11}(kh+h-\tau)}B_1u(\tau)d\tau \\ B_2u(kh) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где

$$z(k) = \begin{bmatrix} x_1(kh) \\ x_2(kh) \end{bmatrix},\ \sum\nolimits_h = \begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau\, A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$k = 0, 1, \ldots$. Она превращается в чисто дискретную систему при дискретном управлении $u(t) = 0$, $t \neq kh, k = 0, 1, \ldots$. Такие системы хорошо изучены.

В общем случае системы (1), (2) при $t \neq kh, k = 0, 1, \ldots$ ее состояние не определено и, чтобы говорить о состояниях системы в такие моменты времени, нужно доопределить в эти моменты времени дискретную составляющую $x_2(\cdot)$ решения системы (1), (2). Это можно сделать, например, сводя ГДН-систему (1), (2) к ГДР-системе (4), (5).

2. Сведение ГДН-системы к ГДР-системе в случае кусочно-постоянных управлений. Рассмотрим систему (1), (2) при воздействии широко используемых в приложениях управлений вида

$$u(t)=u(kh),\, t\in[kh,(k+1)h),\, k=0,1,\dots. \quad (11)$$

Полагая, что

$$\tilde{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(kh) \\ x_2(kh)\end{bmatrix},\, t\in[kh,(k+1)h),\, k=0,1,..., \quad (12)$$

систему (1), (2) запишем в виде

$$\dot{x}_1(t)=A_{11}x_1(t)+\tilde{A}_{12}\tilde{x}_2(t)+B_1u(t); \quad (13)$$

$$\tilde{x}_2(t+h)=\tilde{A}_{21}x_1(t)+\tilde{A}_{22}\tilde{x}_2(t)+\tilde{B}_2u(t), \quad (14)$$

$$t\in[kh,kh+h),\ k=0,1,2,...$$

с начальными условиями

$$x_1(0)=x_{10},\ \tilde{x}_2(\tau)=\tilde{\varphi}(\tau)=\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20}\end{bmatrix},\ \tau\in[0,h), \quad (15)$$

где $\tilde{A}_{12}=[0\ A_{12}],\, \tilde{A}_{21}=0,\, \tilde{A}_{21}=\sum_h$ (матрица $\sum_h$ определена в (10)). Система (13), (14) является частным случаем ГДР-системы (4), (5).

Отметим, что начальные условия в (15) в отличие от (3) определяются заданием не только начальных точек $x_1(0), x_2(0),$ но и начальной вектор-функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$.

3. Гибридные дифференциально-разностные системы. Рассмотрим систему (4), (5) с начальными условиями (6).

В качестве начального состояния ГДР-системы (4), (5) можно рассматривать пару

$$(x_{10},\varphi(\cdot))\in\mathbb{R}^{n_1}\times\hat{C}([0,h],\mathbb{R}^{n_2}), \quad (16)$$

состоящую из точки x_{10} в $\mathbb{R}^{n_1}$ и функции $\varphi(\cdot)$ из множества $\hat{C}([0,h],\mathbb{R}^{n_2})$ кусочно-непрерывных на промежутке $[0,h]$ вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^{n_2}$. Аналогично под состоянием системы в текущий момент t можно понимать пару $(x_1(t),x_{2t})$, где x_{2t} – вектор-функция на промежутке $[0,h]$ со значениями $x_{2t}(\tau)=x_2(t+\tau)$, $\tau\in[0,h)$ (здесь $x_1(t), x_2(t),$ $t\ge 0$ – решение системы (4), (5) с начальными условиями (6). Рассматривая теперь множество $\mathbb{R}^{n_1}\times\hat{C}([0,h],\mathbb{R}^{n_2})$ как множество состояний ГДР-системы (4), (5) и связывая с самой системой сильно непрерывную полугруппу линейных преобразований, определенную на $\mathbb{R}^{n_1}\times\hat{C}([0,h],\mathbb{R}^{n_2})$, можно распространить на ГДР-системы известный подход Красовского – Хейла – Шиманова к исследованию систем с последействием как специальных бесконечномерных систем [15].

Однако, как и в случае ГДН-систем, введенное состояние не является минимальным, и в качестве минимального состояния можно рассмотреть пару $(x_1(t),x_{2t}^m)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\hat{C}([0,h],\mathbb{R}^{n_2})$, где $x_{2t}^m(\tau)=A_{12}x_2(t+\tau),\ \ \tau\in[0,h)$.

Используя понятия минимального состояния, основные вопросы качественной теории управления и наблюдения для ГДР-систем можно исследовать по аналогии с общей теорией систем Калмана, в частности рассматривать вопросы управляемости и наблюдаемости таких систем, управляемости и наблюдаемости их минимальных состояний, что приводит к игровым задачам управляемости как задачам программного преследования однотипных объектов и двойственным задачам наблюдаемости. Некоторые такие задачи рассмотрены в [16, 17], где получены параметрические критерии их разрешимости.

4. Игровые задачи управляемости для ГДР-систем. Пусть символы $x_i(t)=x_i(t,t_0,\varphi_0,\varphi(\cdot),u)$, $i=1,2,\ t\ge 0,$ означают решение системы (4), (5), соответствующее начальному состоянию $(\varphi_0,\varphi(\cdot))$ в начальный момент времени t_0 и управлению $u=u(\cdot)$. Введем обозначение:

$$x(t,t_0,\varphi_0,\varphi(\cdot),u)=\begin{bmatrix} x_1(t,t_0,\varphi_0,\varphi(\cdot),u) \\ x_2(t,t_0,\varphi_0,\varphi(\cdot),u)\end{bmatrix},\ t\ge 0.$$

Определение. При заданном моменте времени t_* и $s\ge 0,\ t\ge 0,$ система (4), (5) называется t_*-относительно $(s,\ t)$-управляемой, если для любых начальных состояний $(\varphi_0,\varphi(\cdot))$, $(\psi_0,\psi(\cdot))$ и любого допустимого (кусочно-непрерывного) управления $v=v(\cdot)$ найдется допустимое управление $u=u(\cdot)$, такое, что соответствующее решение системы обладает свойством (см. рис. 1)

$$x(t_*,t_*-s,\varphi_0,\varphi(\cdot),u)=x(t_*,t_*-t,\psi_0,\psi(\cdot),v). \quad (17)$$

Аналогично формулируется задача t_*-полной $(s,\ t)$-управляемости, когда в (17) требуется совпадение траекторий не только в момент t_* (как в (17)), но и во все последующие моменты времени, т. е.

$$x(t_*+\tau,t_*-s,\varphi_0,\varphi(\cdot),u)=$$
$$=x(t_*+\tau,t_*-t,\psi_0,\psi(\cdot),v),$$

$\tau\ge 0,$ при совпадающих управлениях $u(t_*+\tau)=$ $=v(t_*+\tau),\tau\ge 0$ (см. рис. 2).

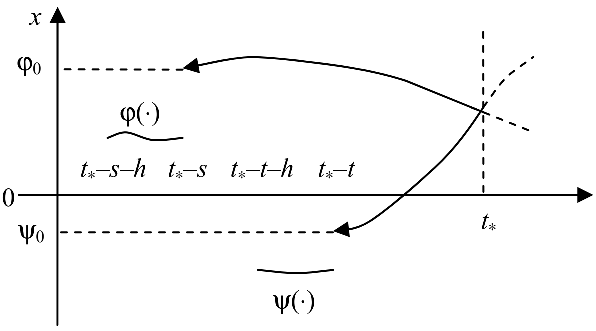

Рис. 1. t_*-относительная $(s,\ t)$-управляемость

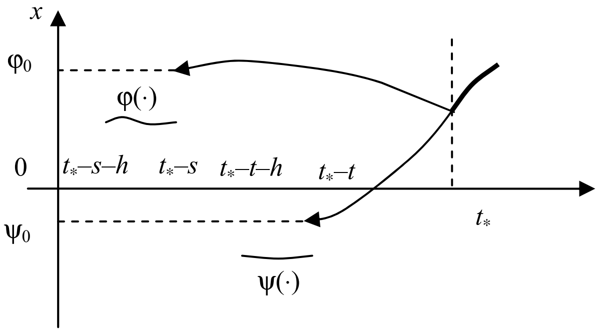

Рис. 2. t_*-полная $(s,\ t)$-управляемость

Момент t_* в определении опускается, если его разрешается выбирать (управляемость за нефиксированное время).

Заключение. В работе рассмотрен метод пространства состояний для линейных стационарных ГДН-систем путем их сведения к ГДР-системам, что позволяет ввести понятие состояния для произвольного текущего момента времени. Следует, однако, отметить, что при этом пространство состояний становится бесконечномерным и, таким образом, теряется конечномерная специфика ГДН-систем. Поэтому представляет интерес разработка метода пространства состояний для ГДН-систем с учетом их конечномерной природы.

Литература

1. Dai L. Singular control systems // Lecture notes in control and information sciences: 118. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. 319 p.

2. Kunkel P., Mehrmann W. L. Differential-algebraic equations: analysis and numerical solutions. Zürich, Switzerland: European Mathematical Society. 2006. 377 p.

3. März R. Solvability of linear differential algebraic equations with properly stated leading terms // Results in Mathematics. 2004. № 45. P. 88–95.

4. Кириллова Ф. М., Стрельцов С. В. Необходимые условия оптимальности управлений в гибридных системах // Управляемые системы: сб. трудов. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. Вып.14. С. 24–33.

5. Ахундов А. А. Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы: сб. ст. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. Вып. 14. С. 4–10.

6. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems // Informatica. 2006. Vol. 17, No. 4. P. 565–576.

7. Van der Schaft A., Schumacher H. An introduction to hybrid dynamical systems. Berlin: Springer, 2000. 324 p.

8. Куржанский А. Б. Отчет о 16-м международном конгрессе ИФАК (IFAC) – международной федерации по автоматическому управлению // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 183–189.

9. Hybrid Systems / J. J. Gertler [et al.] // Prepr. 13th World Congr. IFAC, 1996. Vol. I. P. 275–311, 473–476.

10. Baker C. T. H., Paul C. A., Tian H. Differential-algebraic equations with after-effect // J. Comput. and Appl. Math. 2002. Vol. 140. P. 63–80.

11. Марченко В. М., Поддубная О. Н. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями // Доклады РАН, 2005. Т. 404, № 4. С. 465–469.

12. Марченко В. М., Луазо Ж.-Ж. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 728–740.

13. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

14. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978.

15. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 426 с.

16. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 7–10.

17. Марченко В. М., Пыжкова О. Н. Относительная достижимость линейных стационарных систем, управляемых дискретным регулятором // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 11–13.

Поступила 15.03.2014